# Применение математических средств при моделировании военных конфликтов

О. И. Канищева, e-mail: oleka_olesya@mail.ru
А. А. Перистов

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

***Аннотация.*** *В данной статье рассмотрено применение математических средств при моделировании военных конфликтов и гонки вооружений. Авторами был проведен анализ двух моделей гонки вооружения по Ричардсону. Результаты анализа модели подтверждены численными расчётами.*

***Ключевые слова:*** *Математическое моделирование, численные методы, теория военных конфликтов, системы дифференциальных уравнений, модель Л. Ричардсона.*

## Введение

Первой попыткой применить математические методы к изучению международного конфликта и гонки вооружений являются работы шотландского математика и метеоролога Л. Ричардсона [1,2]. Направление, связанное с его именем, ставит своей целью использовать в исследованиях международных конфликтов хорошо зарекомендовавшие себя при описании физических процессов математические средства – дифференциальные уравнения.

## 1. Постановка задачи

В своих работах Л. Ричардсон приходит к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ay - mx + r, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx - ny + s, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – расходы на вооружение одной и другой страны соответственно. Положительные константы $a$ и $b$ регулируют реакцию одной страны на вооруженность страны-оппонента, члены $ay$ и $bx$ обусловливают целостность модели, связывают между собой два уравнения. Константы $m$ и $n$ задают ограничения роста вооружений: чем больше у государства военных расходов, тем сильнее недовольство населения; члены $mx$ и $ny$ не дают странам наращивать вооружения бесконечно. Параметры $r$ и $s$ характеризуют «державные притязания», «агрессивность» или «экспансионизм» каждой из стран, стимулирующие либо сокращающие военные расходы [3].

Параметры $r$ и $s$ задаются исследователем, остальные параметры являются решением системы (1) и представляют собой матрицу коэффициентов $\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix}$, которая и характеризует структуру модели.

## 2. Решение задачи оптимального распределения

Существует достаточное большое количество математических методов исследования такой матрицы, особое место среди которых занимает анализ собственных значений и собственных векторов. Таким образом, динамическая стабильность системы (устойчивость системы во времени) определяется не конкретным показателем, а характером связи между траекториями движения элементов системы во времени. Решением системы (1) являются функции $x(t)$ и $y(t)$, определяемые для данных начальных условий $x_0$, $y_0$ (начальное состояние гонки вооружений).

Одним из важнейших свойств, которые «разумно» потребовать от гонки вооружений, является стабильность. Формализуем это требование следующим образом. Уровень затрат на вооружение должен быть постоянным и не зависеть от времени:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0, \tag{2}$$

т.е. желательно, чтобы система находилась в состоянии равновесия (2).

Условия равновесия для системы (1) записываются в следующем виде:

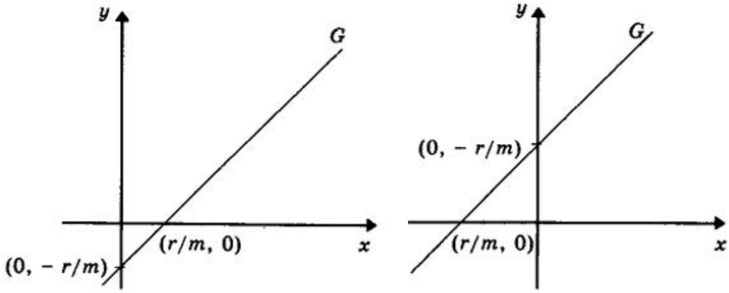
$$\begin{cases} ay - mx + r = 0, \\ bx - ny + s = 0, \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) определим

$$y = \frac{m}{a}x - \frac{r}{a}, \tag{4}$$

$$y = \frac{b}{n}x + \frac{s}{n}, \tag{5}$$

и рассмотрим геометрическую интерпретацию линейного уравнения (4) на фазовой плоскости $(x, y)$ (рис. 1).




а б

*а – при* $r > 0$ , *б – при* $r < 0$

*Рис. 1.* Геометрическая интерпретация уравнения (4)

Для всех точек прямой $G$ имеем $dx/dt = 0$ . Первое уравнение системы (1) задает горизонтальную компоненту скорости движения точки в фазовой плоскости, а второе уравнение – вертикальную. Если в некоторой точке фазовой плоскости $dx/dt > 0$ , то $x(t)$ возрастает и решение системы движется от этой точки вправо, а если $dx/dt < 0$ , то влево. Аналогично, если $dy/dt > 0$ (< 0), то точка движется вверх (вниз). Прямая $G$ делит плоскость $(x, y)$ на две полуплоскости. Для всех точек одной полуплоскости $dx/dt > 0$ , а другой полуплоскости $dx/dt < 0$ 0. То есть первое уравнение системы (1) как бы заставляет точки притягиваться по горизонтали к прямой $G$ . Аналогичное утверждение верно для второго уравнения этой системы и прямой $Z$ (вертикальное притяжение) (рис. 2). Прямые $G$ и $Z$ делят первый квадрант на четыре области I, II, III, IV.

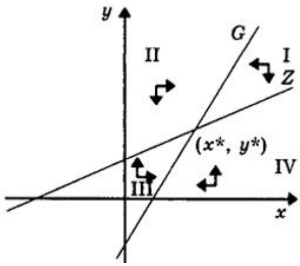



*Рис. 2.* Точка равновесия в первом квадранте

Рассмотрим поведение модели Ричардсона при $t \to \infty$. Возможны три случая:

1. Бесконечная гонка вооружений: $x \to \infty$ и $y \to \infty$.
2. Взаимное разоружение: $x \to 0$, $y \to 0$.
3. Равновесие вооружений: $x \to x^*$, $y \to y^*$, где $x^*, y^* > 0$. Точка равновесия $(x^*, y^*)$ находится на пересечении прямых $G$ и $Z$ (рис. 2).

Легко показать, что если $r > 0$ и $s > 0$, то точка пересечения $G$ и $Z$ лежит в первом (рис. 2) или третьем (рис. 3) квадранте. Стрелки на рисунках 2-3 показывают горизонтальную и вертикальную составляющие движения точки, находящейся в той или иной области фазовой плоскости.

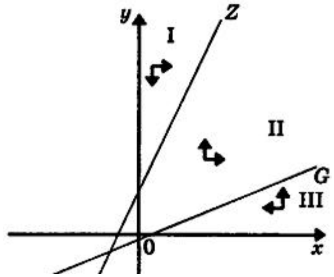



*Рис. 3.* Точка равновесия в третьем квадранте

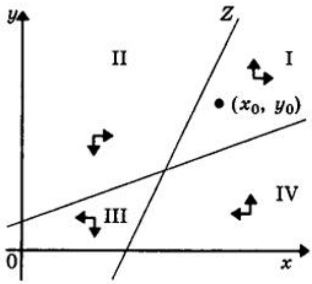



*Рис. 4.* Поведение системы при $r < 0$ или (и) $s < 0$

Рассмотрим ситуацию, когда, по меньшей мере, один из коэффициентов $r, s < 0$ (рис. 4). Если начальный уровень затрат, т.е. точка $(x_0, y_0)$, находится в области $I$, то гонка вооружений будет бесконечной. Если начальная точка находится в области $III$, то решение системы (3) также «уходит» от равновесия $(x^*, y^*)$, но зато стремится к точке (0,0) (взаимное разоружение). Таким образом, наличие у одного или обоих государств «доброй воли» ($r, s < 0$) не гарантирует удовлетворительного исхода гонки вооружений. Все зависит от начального состояния системы.

Очевидно, что поведение модели Ричардсона зависит от соотношения коэффициентов $a, b, m, n$ и знаков $r, s$. Имеют место четыре возможных случая:

1. Если $mn - ab > 0, \; r > 0, s > 0$, то существует точка равновесия.
2. Если $mn - ab < 0, \; r > 0, s > 0$, то модель ведет к неограниченной эскалации гонки вооружений.
3. Если $mn - ab > 0, \; r < 0, s < 0$, то гарантируется полное взаимное разоружение.
4. Если $mn - ab < 0, \; r < 0$, то пессимистичность или оптимистичность прогноза существенно зависит от начального состояния.

**Заключение**

В работе был проведен анализ двух моделей гонки вооружения по Ричардсону. Результаты анализа одной модели подтверждены численными расчётами и графиками функций $x(t), \; y(t)$. Также было разработано программное приложение математической модели гонки вооружений, представляющее реализацию модели Ричардсона с подробным анализом двух возможных вариантов противостояния.

**Список литературы**

1. Буянов Б.Б., Лубков Н.В., Поляк Г.Л. Математическая модель длительного вооруженного конфликта // Проблемы управления. 2007. №5. С. 48-51.
2. Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. №3. С. 134-140.
3. Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий // Программные продукты и системы. 2010. №10. С. 2-5.